

## PARTIEL

### ALGÈBRE 1

#### 1. MODULES

**1.1.** Soit  $K$  un corps et  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $\geq 1$ . Montrer qu'il y a plusieurs manières distinctes de munir  $V$  d'une structure de  $K[X]$ -module.

**1.2.** Soit  $M$  un  $\mathbf{Q}$ -module. Montrer qu'il n'y a pas d'autre manière de munir  $M$  d'une structure de  $\mathbf{Q}$ -module.

#### 2. ANNEAUX

Soit  $A$  un anneau noethérien.

**2.1.** Soit  $I \neq A$  un idéal de  $A$ . On pose  $I_1 = I$  et on définit une suite d'idéaux de  $A$  en posant  $I_{j+1} = I_j$  si  $I_j$  est maximal et en choisissant  $I_{j+1}$  tel que  $I_j \subsetneq I_{j+1} \subsetneq A$  sinon.

Utiliser cette suite pour montrer qu'il existe un idéal maximal de  $A$  qui contient  $I$ .

**2.2.** On appelle  $\text{Rad}(A)$  l'intersection de tous les idéaux maximaux de  $A$ . Montrer que  $\text{Rad}(A)$  est l'ensemble des  $x \in A$  tels que  $1 - xy$  est inversible pour tout  $y \in A$ .

**2.3.** Montrer que  $\text{Rad}(A/\text{Rad}(A)) = \{0\}$ .

#### 3. MATRICES

Soit  $M$  la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 9 & -3 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

**3.1.** Soit  $V = \mathbf{Q}^3$  et  $f : V \rightarrow V$  l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de  $V$  est  $M$ . Mettre  $f$  sous forme de Jordan.

**3.2.** Montrer qu'il existe une matrice  $Q \in \text{GL}_3(\mathbf{Q})$  telle que  $QMQ^{-1}$  est diagonale.

**3.3.** Soit  $W = \mathbf{F}_2^3$  et  $g : W \rightarrow W$  l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de  $W$  est  $M$ . Mettre  $g$  sous forme de Jordan.

**3.4.** Existe-t'il une matrice  $P \in \text{GL}_3(\mathbf{Z})$  telle que  $PMP^{-1}$  est diagonale?

## 4. POYNÔMES SUR LES CORPS FINIS

Si  $n$  est un entier  $\geq 1$  et si  $q$  est une puissance d'un nombre premier  $p$ , on appelle  $\text{Irr}(n, \mathbf{F}_q)$  l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de degré  $n$  à coefficients dans  $\mathbf{F}_q$  et  $i(n, q)$  le cardinal de  $\text{Irr}(n, \mathbf{F}_q)$ .

**4.1.** Soit  $P \in \text{Irr}(n, \mathbf{F}_q)$  et  $\omega \in \overline{\mathbf{F}}_q$  une racine de  $P$ . Montrer que  $\omega^q$  est aussi une racine de  $P$  puis que les racines de  $P$  sont exactement les  $\omega^{q^i}$  avec  $0 \leq i \leq n-1$ .

**4.2.** Montrer que si  $d$  divise  $n$  et si  $P \in \text{Irr}(d, \mathbf{F}_q)$ , alors  $P(X)$  divise  $X^{q^n} - X$ .

**4.3.** Montrer que si  $P(X)$  est un facteur irréductible unitaire de  $X^{q^n} - X$ , alors  $\deg(P)$  divise  $n$ .

**4.4.** Montrer que  $\sum_{d|n} d \cdot i(d, q) = q^n$  et en déduire  $i(n, q)$  pour  $1 \leq n \leq 5$ .