

EXAMEN D'ALGÈBRE 1, DEUG MIAS PREMIÈRE ANNÉE

Durée 2 heures. Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1

- 1) Soient X_1, X_2 et X_3 trois vecteurs de \mathbb{R}^n . Qu'appelle-t-on sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{X_1, X_2, X_3\}$? On notera F cet ensemble.
- 2) Donner une définition de la dimension de F et du rang de $\{X_1, X_2, X_3\}$.
- 3) Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension de F ? On pourra discuter suivant les valeurs de n .
- 4) On pose $X_1 = (2002, 1, 2003)$, $X_2 = (2001, 0, 2002)$ et $X_3 = (1, 1, 1)$. Que vaut le rang de la famille $\{X_1, X_2, X_3\}$?

Exercice 2

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E) : z^2 - (2+i)z + 3+i = 0$.
- 2) Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} z & 2z - z^2 & z \\ 0 & 2 - z & 1 \\ z & 2z - z^2 + i - 3 & i \end{pmatrix}.$$

- 3) On définit les vecteurs de \mathbb{C}^3 :

$$X_1 = (z, 2z - z^2, z), \quad X_2 = (0, 2 - z, 1), \quad X_3 = (z, 2z - z^2 + i - 3, i),$$

où z est un paramètre complexe.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que $\{X_1, X_2, X_3\}$ soit une famille libre.

- 4) On note F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{X_1, X_2, X_3\}$. Dans le cas $z = 1 - i$, déterminer la dimension de F et donner une base de F .

Exercice 3

On considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$(\mathcal{H}) \quad P(2) = P'(2) = 0, \quad P(-2) = -96, \quad P(3) = 24 \quad \text{et} \quad P(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} - 8.$$

- 1) Montrer que P est divisible par $(X - 2)^2$. On notera $P = (X - 2)^2 Q$.
- 2) Exprimer le degré de Q en fonction de celui de P .

- 3) On dit qu'un polynôme est unitaire si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1. Montrer que si P est unitaire alors Q l'est aussi.
- 4) On pose $A = Q(-2)$, $B = Q(3)$ et $C = Q(\sqrt{2})$. Calculer A , B et C .
- 5) Résoudre le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 4a - 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = -3 \\ 2a + \sqrt{2}b + c = -\sqrt{2} \end{cases}$$

- 6) En déduire qu'il existe un unique polynôme Q unitaire de degré 3 tel que $Q(-2) = A$, $Q(3) = B$ et $Q(\sqrt{2}) = C$. Donner l'expression de ce polynôme.
- 7) Déterminer l'ensemble des polynômes P unitaires de degré 5 vérifiant (\mathcal{H}) .
- 8) Existe-t-il des polynômes P non unitaires et de degré 5 vérifiant (\mathcal{H}) ?

Exercice 4

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 12 \\ -1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- 1) Déterminer une matrice échelonnée de même rang que A .
- 2) Quel est le rang de A ?