Université Paris XII Val de Marne | Année 2005–2006

Examen d'Algèbre dans $\mathbb{R}^n$ | L1, 2ème semestre, 1ère session

---

Durée 2 heures. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
La présentation et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.
Lorsque des résultats du cours seront utilisés, ils devront clairement être énoncés.

Exercice 1. On considère le système linéaire suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

a) Donner une solution du système (S).

b) Trouver toutes les solutions du système homogène (S') associé au système (S).

c) Déterminer toutes les solutions du système (S).

Exercice 2. Soit $\vec{a} = (2,1,3,-1)$, $\vec{b} = (3,-1,2,1)$, $\vec{c} = (1,3,4,-2)$, $\vec{d} = (4,-3,1,1)$.

a) Montrer que la famille $(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})$ est liée.

b) Montrer que la famille $(\vec{a},\vec{b},\vec{d})$ est libre.

c) Soit $F = \mathrm{Vect}\,(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})$. Donner une base et la dimension de F.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la matrice A est inversible.

b) Calculer A^{-1}.

c) Trouver une matrice colonne x telle que $Ax = y$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\det A$ de deux manières :

a) par la méthode du pivot de Gauss;

b) en faisant un développement par rapport à la première ligne.

Exercice 5. Dans tout cet exercice, on se place dans le plan.

a) Écrire l'équation de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par les points $A(1,2)$ et $B(2,1)$.

b) Calculer la distance de $\mathcal{D}_1$ à l'origine.

c) Écrire l'équation de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par le point $C(1,1)$ et orthogonale à $\mathcal{D}_1$.

Exercice 6. Soient $\vec{a} = (1,1,2)$ et $\vec{b} = (-1,-1,1)$ deux vecteurs de l'espace. Calculer le vecteur unitaire $\vec{x}$ orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et tel que la base $(\vec{a}, \vec{x}, \vec{b})$ soit directe.