Université Paris XII Val de Marne — Année 2005–2006

Examen d'Algèbre dans $\mathbb{R}^n$ — L1, 2ème semestre, 2ème session

---

Durée 2 heures. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
La présentation et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.
Lorsque des résultats du cours seront utilisés, ils devront clairement être énoncés.

Exercice 1. Donner la ou les bonnes réponses aux trois questions suivantes (on ne cherchera pas à justifier).

1. Pour tout couple (A, B) de matrices carrées, on a

   (a) $\det AB = \det A \det B$,

   (b) $\det(A + B) = \det A + \det B$,

   (c) $\det(2A) = 2 \det A$.

2. Soit $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On note (P) l'assertion "$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est une base" et (Q) l'assertion "les vecteurs $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont deux à deux non colinéaires".

   (a) $(P) \Longrightarrow (Q)$ et $(Q) \not\Longrightarrow (P)$,

   (b) $(Q) \Longrightarrow (P)$ et $(P) \not\Longrightarrow (Q)$,

   (c) $(P) \iff (Q)$.

3. L'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $x^2 + 2y^2 = 4$ est

   (a) une droite,

   (b) une ellipse,

   (c) un cercle,

   (d) vide.

Exercice 2. Dans tout cet exercice, les matrices considérées sont de taille 2×2.

1. Trouver toutes les matrices A telles que
$$A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Existe-t-il une matrice A telle que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$? Justifiez votre réponse.

Exercice 3. Philippe vient de valider son semestre avec la moyenne de 10/20. Il a passé un module de mathématiques (coefficient 2), un module de physique (coefficient 1) et un module d'informatique (coefficient 2).

La note de physique de Philippe est de 5 points supérieure à la moyenne des notes de mathématiques et d'informatique, et est aussi égale à la somme de la note d'informatique et de la moitié de la note de mathématiques.

Quelles ont été les notes de Philippe dans ces trois matières ?

Exercice 4. Soit $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et $\vec{v} = (1, x, 1)$ avec x paramètre réel.

1. Comment choisir x pour avoir $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{v}$?
2. Avec ce choix de x, trouver un troisième vecteur $\vec{w}$ non nul tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une famille orthogonale.
3. Calculer le volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs.

Exercice 5. Dans le plan, on considère les deux points $A(1, 2)$ et $B(-1, 2)$.

1. Montrer que l'ensemble des points M du plan situés à égale distance de A et de B est une droite Δ perpendiculaire à la droite (AB) dont on donnera une équation.
2. Représenter Δ.
3. Quelle est la distance de Δ à l'origine du repère ?