Université Paris XII Val de Marne — Année 2006–2007

Examen d'Algèbre dans $\mathbb{R}^n$ — L1, 2ème semestre, 1ère session

Durée 2 heures. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
La présentation et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.
Lorsque des résultats du cours seront utilisés, ils devront clairement être énoncés.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, m désigne un paramètre réel.

1. Montrer que
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2m^3 + m^2 + 4m - 3.$$

2. Montrer que le système
$$(S) : \begin{cases} x + y + (2m-1)z = 1, \\ x + my + z = 1, \\ mx + y + z = m \end{cases}$$
est de Cramer si et seulement si $m \notin \{-3/2, 1\}$.

3. On considère les plans
$$P_1 : x + y + (2m-1)z = 1, \quad P_2 : x + my + z = 1, \quad P_3 : mx + y + z = m.$$
   (a) Donner un vecteur normal unitaire pour chacun de ces plans.
   (b) Dans le cas $m \notin \{-3/2, 1\}$, montrer que ces trois plans s'intersectent en un point unique dont on déterminera les coordonnées.
   (c) Que peut-on dire dans les cas $m = 1$ et $m = -3/2$?

Exercice 2. Soit $\vec{a} = (1,1,1,1)$, $\vec{b} = (2,0,2,0)$, $\vec{c} = (2,1,2,-2)$, $\vec{d} = (5,2,5,-1)$.

1. La famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ est-elle libre ? Justifiez votre réponse.
2. Montrer que la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est libre.
3. Soit $F = \mathrm{Vect}\,(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$. Donner une base et la dimension de F.

Exercice 3. Dans tout l'exercice x désigne un paramètre réel. On pose $A = I + xB$ avec
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer B^2 et B^3.

2. En déduire A^2 et A^3.
3. Calculer A^n pour $n \geq 4$.

Exercice 4. Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. On note $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ l'angle non orienté entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

1. Exprimer $\vec{a} \cdot \vec{b}$ et $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$ en fonction de $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ et $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$.
2. En déduire que $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 + \left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\|^2 = \left\|\vec{a}\right\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2$.
3. Cette formule reste-t-elle valable si l'un des deux vecteurs est nul ?

Exercice 5. Trouver trois réels a, b et c tels que pour tout $x \notin \{-2, -1\}$ on ait

$$\frac{3x^2 + 5}{x^2 + 3x + 2} = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

Exercice 6. Trouver deux matrices carrées A et B toutes les deux non nulles telles que $AB = 0$.