Université Paris XII Val de Marne — Année 2006–2007, 1ère session

CORRIGÉ DE L'EXAMEN D'ALGÈBRE DANS $\mathbb{R}^n$ — L1, 2ÈME SEMESTRE

Exercice 1. 1. On peut par exemple appliquer la méthode de Sarrus. On trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + m + (2m-1) - \big(m^2(2m-1) + 1 + 1\big),$$
$$= -2m^3 + m^2 + 4m - 3.$$

2. Le système considéré est de Cramer si et seulement si le déterminant de la première question n'est pas nul. Or $-2m^3 + m^2 + 4m - 3 = -(3+2m)(m-1)^2$, donc ce déterminant s'annule si et seulement si $m \notin \{-3/2, 1\}$, d'où le résultat.

3. (a) Comme vecteurs normaux unitaires, on peut choisir

$$\vec{n}_1 = \frac{(1,1,2m-1)}{\sqrt{4m^2-4m+3}}, \quad \vec{n}_2 = \frac{(1,m,1)}{\sqrt{2+m^2}} \text{ et } \vec{n}_3 = \frac{(m,1,1)}{\sqrt{2+m^2}}.$$

(b) L'intersection des trois plans est constituée par les points dont les coordonnées (x,y,z) vérifient le système (S). Donc les trois plans s'intersectent en un point unique si et seulement si (S) est de Cramer donc si et seulement si $m \notin \{-3/2, 1\}$. En résolvant le système (S), on trouve le point $(1,0,0)$ (quelle que soit la valeur de m).

(c) Dans le cas $m = 1$, les trois plans sont confondus (car ont la même équation cartésienne).

Dans le cas $m = -3/2$, la famille $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ est de rang 2 donc l'intersection est soit vide, soit une droite. Étant donné que $(1,0,0)$ appartient aux trois plans, on en déduit qu'il s'agit d'une droite (plus précisément de la droite passant par $(1,0,0)$ et dirigée par le vecteur $(2,2,1)$).

Exercice 2. 1. On constate que $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Donc la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ est liée.

2. La matrice constituée par les vecteurs $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

En effectuant un pivot de Gauss, on montre aisément que cette matrice est de rang 3. Donc la famille considérée est libre.

3. D'après la question précédente, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est libre, donc $\dim F \geq 3$. Mais, on a vu que $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, donc $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est aussi génératrice de F. En conséquence, c'est une base de F et $\dim F = 3$.

Exercice 3. 1. On trouve que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. On a
$$A^2 = (I + xB)(I + xB) = I^2 + xBI + xIB + x^2B^2 = I + 2xB + x^2B^2$$
puis, en tenant compte de $B^3 = 0$ et de la formule précédente,
$$A^3 = A^2A = (I + 2xB + x^2B^2)(I + xB) = I + 3xB + 3xB^2.$$
Donc
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 4x - x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3x & 6x - 3x^2 \\ 0 & 1 & -3x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Cette question pouvait se traiter ou bien directement en utilisant la formule du binôme de Newton et en remarquant que $B^p = 0$ pour $p \geq 3$, ou par récurrence. On trouve que
$$A^n = I + nxB + \frac{n(n-1)}{2}x^2B^2 = \begin{pmatrix} 1 & nx & 2nx - \frac{n(n-1)}{2}x^2 \\ 0 & 1 & -nx \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. 1. D'après le cours,
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\cos\widehat{(\vec{a},\vec{b})} \quad \text{et} \quad \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\sin\widehat{(\vec{a},\vec{b})}.$$

2. En observant que $\cos^2\widehat{(\vec{a},\vec{b})} + \sin^2\widehat{(\vec{a},\vec{b})} = 1$, on en déduit que
$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 + \left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\|^2 = \left\|\vec{a}\right\|^2\left\|\vec{b}\right\|^2.$$

3. Cette formule reste valable si l'un des deux vecteurs est nul car les deux membres de l'égalité à démontrer sont nuls.

Exercice 5. En réduisant au même dénominateur, on trouve que
$$a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{ax^2 + (3a+b+c)x + (2a+2b+c)}{(x+1)(x+2)}.$$
Donc l'égalité demandée est vérifiée pour tout $x \notin \{-2, -1\}$ si et seulement si
$$\begin{cases} a = 3, \\ 3a + b + c = 0, \\ 2a + 2b + c = 5. \end{cases}$$
Après résolution de système linéaire, on trouve $a = 3$, $b = 8$ et $c = -17$.

Exercice 6. Il y a abondance de choix. On peut par exemple prendre
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$