

TD 10 : ALGÈBRE MULTILINÉAIRE ET PRODUITS TENSORIELS

Exercice 1

1. Soit $\varphi : A \rightarrow A'$ un morphisme entre deux anneaux commutatifs, et M un A -module. Montrer que $A' \otimes_A M$ peut être muni d'une structure de A' -module. Montrer que si M est un A -module libre, alors $A' \otimes_A M$ est un A' -module libre.
2. Montrer que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n .

Exercice 2

Soit A un \mathbb{Z} -module.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ est isomorphe à A/mA . En déduire que $mA = A$ si et seulement si $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A = 0$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/\text{pgcd}(m,n)\mathbb{Z}$.

Exercice 3

Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules et N un A -module. Montrer que la suite

$$M' \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N \rightarrow 0$$

est exacte, mais que $0 \rightarrow M' \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N \rightarrow 0$ ne l'est pas forcément (on pourra considérer $A = M = \mathbb{Z}$).

Exercice 4

Un A -module N est *plat* si pour toute suite exacte $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ de A -modules, la suite $0 \rightarrow M' \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow M'' \otimes N \rightarrow 0$ est exacte. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. N est plat ;
2. pour tout morphisme injectif de A -modules $\phi : M' \rightarrow M$, le morphisme

$$\phi \otimes 1 : M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$$

est injectif ;

3. pour tous A -modules M', M de type fini et pour tout morphisme $\phi : M' \rightarrow M$ injectif, le morphisme $\phi \otimes 1 : M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$ est injectif.

Exercice 5

Montrer que pour tous entiers k, r tels que $k \leq r$,

$$\{i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N} / 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r\}$$

est de cardinal C_r^k et

$$\{i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N} / 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq r\}$$

est de cardinal C_{r+k-1}^k .

Exercice 6

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n .

1. Soit $\lambda : E^k \rightarrow \mathbb{R}$ une forme k -linéaire alternée ($k \leq n$). Montrer que si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , et si pour tout j on note $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$, alors

$$\lambda(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \begin{vmatrix} a_{i_1,1} & \dots & a_{i_1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k,1} & \dots & a_{i_k,k} \end{vmatrix} \lambda(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

2. Si $f \in \mathcal{L}(E, E)$, on définit ${}^t f$ comme l'application qui à toute forme n -linéaire alternée λ associe l'application

$${}^t f(\lambda) : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \lambda(f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

Vérifier que ${}^t f$ est à valeurs dans les formes n -linéaires alternées. Retrouver que si $f, g \in \mathcal{L}(E, E)$, alors $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.

Exercice 7

Soit $\rho^1 : G \rightarrow GL(V_1)$ et $\rho^2 : G \rightarrow GL(V_2)$ deux représentations d'un groupe G .

1. Montrer que ρ^1 et ρ^2 induisent une représentation $\tilde{\rho} : G \rightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$. Comment obtient-on la matrice de $\tilde{\rho}(g)$ à partir de celles de $\rho^1(g)$ et $\rho^2(g)$?
2. On suppose $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de V , et θ l'unique automorphisme de $V \otimes V$ tel que pour tous i, j , $\theta(e_i \otimes e_j) = e_j \otimes e_i$.

(a) Vérifier que $S^2(V) = \text{Ker}(\theta - id)$ et $\Lambda^2(V) = \text{Ker}(\theta + id)$, et montrer que

$$V \otimes V = S^2(V) \oplus \Lambda^2(V).$$

(b) Montrer que $S^2(V)$ et $\Lambda^2(V)$ sont des sous-représentations de $\tilde{\rho}$.