

Feuille n°1 : Nombres complexes & Trigonométrie

1. Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Représenter dans \mathbb{C} : j et j^2 .

2. Calculer $1 + j + j^2$ et j^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Mettre sous la forme $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) les complexes

$$\frac{1 - 3i}{3 - i}, \quad \left(\frac{2 - 3i}{1 + 7i}\right)^2, \quad \frac{i + 5}{(i + 3)^2}$$

3. x, y et z étant trois nombres complexes de module égal à 1, comparer les modules des complexes

$$x + y + z \quad \text{et} \quad xy + yz + zx.$$

4. Montrer que

$$(z + z' \in \mathbb{R} \text{ et } zz' \in \mathbb{R}) \iff (z \text{ et } z' \text{ sont réels ou } z' = \bar{z}).$$

5. Calculer les racines carrées des nombres complexes $1 + i\sqrt{3}$, $8 - 6i$ et $8i - 6$.

6. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (2 + 6i)z + 2i - 5 = 0$.

7. 1. Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - i.$$

2. En déduire le module et l'argument de $z = \frac{z_1}{z_2}$.

3. Utiliser les résultats précédents pour calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

8. Déterminer le module et l'argument de $z = \frac{1+i}{1-i}$, puis calculer z^{32} .

9. Déterminer les complexes z vérifiant $z^3 = \frac{i}{\bar{z}}$.

10. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^n = \bar{z}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

11. Linéariser $\cos x \cos^2(5x)$ et $\sin^2 x \cos(4x)$.

12. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx) = \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx).$$

Indication : calculer

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx) + i \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx).$$

13. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

14. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes

$$y_1 = 1 + \cos x + i \sin x \quad \text{et} \quad y_2 = 1 - \cos x - i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Application : simplifier la fraction $y = \frac{1 - \cos x - i \sin x}{1 + \cos x + i \sin x}$.

15. Résoudre dans \mathbb{R} les équations

1. $\sin(2x) = \cos(4x + \frac{\pi}{2})$

2. $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$

16. Déterminer les réels t tels que l'équation

$$z^2 - 2ze^{it} + 1 = 0$$

ait ses racines imaginaires pures.

17. Soit a un nombre réel. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$\left(\frac{1 + ix}{1 - ix} \right)^3 = \frac{1 + ia}{1 - ia}$$

(on posera $a = \tan(\alpha/2)$ avec $\alpha \in]-\pi, \pi[$ et on donnera les solutions en fonction de α).