Université Paris XII - Val de Marne, UFR Sciences et Technologie 2003–2004
DEUG MIAS 1, Algèbre linéaire 1

TD n°5 : Polynômes

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tels que

$$P(X+1) - P(X-1) = X^2 + 1.$$

2. Effectuer la division de $A \in \mathbb{C}[X]$ par $B \in \mathbb{C}[X]$ dans les cas suivants :

1. $A = X^4 - 1, \quad B = X + 2,$
2. $A = X^4 + iX^3 - iX^2 + X + 1, \quad B = X^2 - iX + 1,$
3. $A = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2, \quad B = X^2 + (1-i)X + 1 + i.$

3. Sans effectuer la division, déterminer le reste de la division de

$$A(X) = (\cos a + X \sin a)^n \quad \text{par} \quad B(X) = X^2 + 1.$$

4. Déterminer le pgcd D de $A = X^3 + X^2 + X + 1$ et $B = X^4 + X^3 + X + 1$, et trouver deux polynômes U et V tels que $AU + BV = D$.
Calculer le ppcm de A et B.

5. Trouver tous les polynômes de degré ≤ 3 tels que

$$P(0) = 1, \; P(1) = 2, \; P(2) = -1, \; P(3) = -2.$$

6. Les restes des divisions euclidiennes d'un polynôme A par $X - a$ et par $X - b$ sont α et β, respectivement. Quel est le reste de la division de A par $(X-a)(X-b)$? (on suppose que $a \neq b$).

7. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que P est divisible par $(X-a)^2$ si et seulement si $P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$.

8. Soit P un polynôme non constant et $m \geq 1$. On suppose que a est racine de P de multiplicité exactement m.
Montrer que a est racine de P' de multiplicité exactement $m - 1$.

9. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, et $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à zéros tous simples. Montrer que tous les zéros de $P^2 + \alpha^2$ dans $\mathbb{C}$ sont simples.

10. Montrer que si $n \geq 2$ le polynôme

$$P(X) = (1 - X^n)(1 + X) - 2nX^n(1 - X) - n^2X^n(1 - X)^2$$

est divisible par $(1 - X)^3$.

11. Déterminer a et b pour que

$$P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$$

admette la racine double $x = 1$. Quel est alors le quotient de $P(X)$ par $(X - 1)^2$?

12. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P = X^5 + 8X^4 + 26X^3 + 44X^2 + 40X + 16$$

après avoir vérifié qu'il admet -2 pour racine.

13. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P(X) = X^4 - 2X^2 \cos\varphi + 1$$

où φ est un réel donné.

14. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $A = X^6 + 1$.

15. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ n'ayant pas de racine réelle. On suppose que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.