TD 2: ANNEAUX

Dans toute cette feuille les anneaux seront supposés commutatifs.

Exercice 1 Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier est premier. Montrer qu'en général l'image réciproque d'un idéal maximal n'est pas maximal.

Exercice 2 Soit A un anneau, I un idéal de A. Quelle relation y a-t-il entre les idéaux de A et ceux de A/I ? Même question en remplaçant "idéaux" par "idéaux premiers" et par "idéaux maximaux".

Exercice 3 Soit A un anneau, I un idéal de A. Montrer que si A est noethérien, alors A/I aussi. Montrer que la réciproque n'est pas vraie.

Exercice 4 Soit A un anneau, I un idéal de A. Montrer :
- I est premier si et seulement si A/I est intègre
- I est maximal si et seulement si A/I est un corps

Exercice 5 Soit A un anneau principal. Montrer que tout idéal premier non nul est maximal.

Exercice 6 Montrer que l'anneau $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.

Exercice 7 Déterminer les idéaux premiers et maximaux des anneaux suivants : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8 Soit A un anneau, I et J deux idéaux de A.

Montrer que $\{a+b, a \in I \text{ et } b \in J\}$ est un idéal de A, et que c'est l'idéal engendré par I et J. On le note $I+J$. On dit que I et J sont premiers entre eux si $I+J=A$.

On note IJ l'idéal engendré par l'ensemble des $\{ab, a \in I \text{ et } b \in J\}$.

1. Soit I et J deux idéaux de A premiers entre eux. Montrer qu'alors $IJ = I \cap J$. Montrer que cette égalité n'est pas forcément vraie si on ne suppose plus les idéaux premiers entre eux.
2. Soit $I_1, \ldots, I_n$ des idéaux de A premiers entre eux deux à deux. Montrer que $I_1 \ldots I_n = I_1 \cap \cdots \cap I_n$.

3. Soit $I_1,\dots,I_n$ des idéaux de A premiers entre eux deux à deux. Montrer que $A/I_1\dots I_n \simeq A/I_1 \times \cdots \times A/I_n$ (commencer par $n = 2$).

Exercice 9 Soit A un anneau euclidien, a et b deux éléments non nuls de A. Soit c le pgcd de a et b donné par l'algorithme d'Euclide. Vérifier que $(c) = (a,b)$, c'est-à-dire que les définitions de pgcd dans un anneau euclidien et dans un anneau principal sont compatibles.

Exercice 10 Soit $A = \mathbb{Z}[i]$. Pour $a \in A$, on note $N(a) = |a|^2$.

1. Vérifier que c'est une application multiplicative, c'est-à-dire que $N(ab) = N(a)N(b)$.
2. Soit $a,b \in A$, $b \neq 0$. Montrer que trouver q et r dans A tels que $a = bq + r$ et $r = 0$ ou $N(r) < N(b)$ est équivalent à trouver $q \in A$ tel que $|a/b - q| < 1$. En déduire que A est euclidien.
3. Quelles sont les unités de A?
4. Montrer que A est isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$. Quels sont les éléments premiers de $\mathbb{Z}$ qui restent des éléments premiers de A?
5. Soit p un nombre premier de $\mathbb{Z}$ qui ne reste pas premier dans A. Montrer que p peut s'écrire sous la forme $p = uv$, où u et v sont irréductibles, $N(u) = N(v) = p$, $u = a + ib$, $v = a - ib$, $a,b \in \mathbb{Z}$. En particulier, on a $p = a^2 + b^2$.
6. Montrer que tout irréductible de A divise un irréductible de $\mathbb{Z}$. En déduire les irréductibles de A.

Exercice 11 1. Soit A un anneau intègre. Montrer qu'un élément premier de A est nécessairement irréductible.

2. Soit A un anneau factoriel. Montrer que tout élément irréductible est premier.
3. Soit A l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.
   (a) Vérifier que chacun des éléments 2, 3, $1+i\sqrt{5}$ et $1-i\sqrt{5}$ est irréductible.
   (b) Montrer qu'aucun de ces éléments n'est premier.
   (c) Vérifier l'égalité $2.3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$.

Exercice 12 Soit A un anneau euclidien. Montrer qu'il existe un élément x non inversible de A tel que la projection canonique $A \to A/(x)$ induise une surjection de $A^* \cup \{0\}$ sur $A/(x)$. Vérifier qu'alors $A/(x)$ est un corps.

Soit $\alpha = \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$. On note $A = \mathbb{Z}[\alpha]$. On se propose de montrer que A est principal, mais pas euclidien. C'est l'objet des deux exercices suivants.

Exercice 13 1. Si $a \in A$, on note $N(a) = |a|^2$. Vérifier que N est une application multiplicative. Vérifier que si $a = u + v\alpha$, $u,v \in \mathbb{Z}$, alors $N(a) = u^2 + uv + 5v^2$. Quelles sont les unités de A?

2. Montrer que α vérifie $\alpha^2 - \alpha + 5 = 0$. En déduire que A est isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 5)$. Soit B un anneau, montrer qu'il existe un morphisme de A dans B si et seulement si il existe $b \in B$ vérifiant $b^2 - b + 5 = 0$. En déduire qu'il n'existe pas de morphisme de A dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ni dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
3. Montrer que A n'est pas euclidien.

Exercice 14 1. Soit a et b dans A. Montrer que l'une des situations suivantes est réalisée :
   (a) il existe q et r dans A, avec $r = 0$ ou $N(r) < N(b)$, et $a = bq + r$
   (b) il existe q et r dans A, avec $r = 0$ ou $N(r) < N(b)$, et $2a = bq + r$

   On a donc une pseudo-division euclidienne sur A.
2. Montrer que (2) est un idéal maximal de A.
3. Soit I un idéal non nul de A, montrer que I est principal (s'inspirer de la démonstration du cas euclidien).

Exercice 15 On cherche à déterminer les idéaux premiers de $\mathbb{C}[X,Y]$.

1. Soit a et b dans $\mathbb{C}$. Montrer que $(X-a,Y-b)$ est un idéal maximal de $\mathbb{C}[X,Y]$.
2. Soit I un idéal principal de $\mathbb{C}[X,Y]$. Montrer qu'il n'est pas maximal.
3. Montrer que les idéaux premiers non nuls de $\mathbb{C}[X,Y]$ se partagent en deux catégories disjointes :
   (a) Ceux qui sont maximaux, qui sont alors de la forme $(X - a,Y - b)$.
   (b) Ceux qui sont principaux.

   (Si I est un idéal premier non nul, on pourra distinguer selon que $I \cap \mathbb{C}[X] \neq \{0\}$ ou $I \cap \mathbb{C}[X] = \{0\}$)