ENS Lyon — Algèbre 1

L3 — 2007-2008

TD 5

Exercice 1 Donner les formes normales des matrices suivantes (à coefficients dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}[x]$ et $\mathbb{Z}[i]$ respectivement) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & -2 \\ -3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+4 & 2 \\ 2x-4 & x+1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x & 3x-1 \\ 4x & x+1 \\ -2x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i & 3 & 2+i \\ 2 & -2+i & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Quels sont les groupes commutatifs de cardinal 72 ?

Exercice 3 Soit A un anneau principal. On dit qu'un M module est cyclique si M est isomorphe à A/I pour un idéal I de A. Vérifier que M est cyclique si et seulement si il existe $x \in M$ tel que $M = Ax$.

Soit I et J deux idéaux de A, quels sont les diviseurs élémentaires de $A/I \oplus A/J$? En déduire que ce module est cyclique si et seulement si I et J sont premiers entre eux.

Exercice 4 Soit A un anneau principal et M un A-module de type fini de torsion. On note $\mathrm{Ann}(M) = \{x \in A, \forall m \in M, x.m = 0\}$.

1. Montrer que $\mathrm{Ann}(M)$ est un idéal non nul de A.
2. Que vaut $\mathrm{Ann}(M \oplus N)$?
3. Montrer que $\mathrm{Ann}(A/I) = I$.
4. Comment retrouver $\mathrm{Ann}(M)$ à partir des diviseurs élémentaires de M ?

Exercice 5

1. Soit k un corps. Montrer qu'il est équivalent de se donner un $k[X]$-module de type fini et de torsion, ou un couple (V,u) formé d'un k-espace vectoriel V de dimension finie, et d'un endomorphisme k-linéaire u de V.
2. Soit $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ un polynôme. On note $M(P)$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} & & & & -a_0 \\ 1 & & & & -a_1 \\ & 1 & & & -a_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit $V = k^n$ et u l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $M(P)$, montrer que (V,u) définit un $k[X]$-module cyclique isomorphe à $k[X]/(P)$. Réciproquement vérifier que tout $k[X]$-module cyclique peut s'écrire sous la forme précédente.

3. Soit $P_1|\dots|P_r$ les diviseurs élémentaires d'un $k[X]$-module (V,u). Montrer que V peut s'écrire $V = \oplus_{i=1}^r V_i$, où chaque V_i est stable par u, et $M(P_i)$ est la matrice de $u_{|V_i}$ dans une certaine base. Comment retrouver le polynôme caractéristique de u et son polynôme minimal à partir des P_i ?
4. Montrer qu'un $k[X]$-module (V,u) est cyclique si et seulement si le polynôme caractéristique de u est égal à son polynôme minimal.

Exercice 6 Pour chacune des deux matrices suivantes, donner les diviseurs élémentaires du $\mathbb{C}[X]$-module donné par $(\mathbb{C}^3,u)$, où u est l'endomorphisme donné par la matrice, et donner la forme de Jordan de u.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 Soit A un anneau principal, et $u : A^n \to A^n$ une application A-linéaire. À quelle condition sur u le module quotient $M = A^n/u(A^n)$ est-il de torsion ?

Montrer que pour $A = \mathbb{Z}$, si M est de torsion, on a $\#M = |\det u|$.

Exercice 8 Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec des blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

et :

$$\begin{pmatrix} M(a,b) & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & I_2 \\ & & & M(a,b) \end{pmatrix}$$

où I_2 est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et où $M(a,b)$ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & a \end{pmatrix}$ avec a et b dans $\mathbb{R}$ vérifiant $a^2 < 4b$.

Exercice 9 Soit M et N deux modules de type fini et de torsion sur un anneau principal A. On écrit les décompositions en parties p-primaires de M et N : $M = \oplus_{p \text{ premier}} \oplus_{i=1}^{m_p} A/p^{\alpha(p,i)}$ et $N = \oplus_{p \text{ premier}} \oplus_{i=1}^{n_p} A/p^{\beta(p,i)}$.

Écrire la décomposition en parties p-primaires de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$.

Exercice 10 Soit V un espace vectoriel de dimension infinie (on pourra considérer $V = \mathbb{C}[X]$ si on veut). On pose $A = L(V)$. Montrer que V est isomorphe à $V \oplus V$, et en déduire que A est isomorphe à A^2.