ENS Lyon — Algèbre 1
L3 — 2007-2008

TD 6 : Groupes

Exercice 1
Soient a et b deux éléments d'un groupe G. Montrer que les ordres de ab et ba sont égaux (éventuellement infinis).

Exercice 2
Soit G un groupe fini d'ordre n. Montrer que G est engendré par une famille de cardinal au plus égal à $\log_2 n$. (*Indication* : construire une suite de sous-groupes $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ avec $x_{k+1} \notin \langle x_1, \dots, x_k \rangle$)

Exercice 3
Soit G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice fini.

1. Montrer que $(G : H)$ est aussi égal au nombre de classes Hx avec $x \in G$.
2. En déduire qu'un sous-groupe d'indice 2 de G est toujours distingué.

Exercice 4
Montrer qu'un groupe d'ordre 6 est isomorphe à $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ ou à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 5
Soit $\mathcal{H}$ le groupe des homéomorphismes de $\mathbf{R}$.

1. Montrer que le seul élément d'ordre fini impair de $\mathcal{H}$ est l'identité.
2. Montrer que tout élément d'ordre 2 de $\mathcal{H}$ est conjugué à $-\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$.
3. En déduire les éléments d'ordre fini de $\mathcal{H}$ à conjugaison près.

Exercice 6
On identifie le plan $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$ via $(x, y) \mapsto x + iy$ et on considère le polygone régulier P_n de sommets $e^{2ik\pi/n}$ $(0 \leq k < n)$. On note $G = \{g \in \mathrm{O}_2(\mathbf{R}), g(P_n) = P_n\}$.

1. Montrer que $G = \langle r, s \rangle$ avec $r : z \mapsto e^{2i\pi/n} z$ et $s : z \mapsto \overline{z}$.
2. Montrer la relation $srs = r^{-1}$.
3. Montrer que G est isomorphe au groupe diédral D_n.
4. Déterminer le centre de D_n.

Exercice 7
Soit p un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre p^2 est abélien.

Exercice 8
On dit que l'action d'un groupe G sur un ensemble E est k-transitive $(k \geq 2)$ si pour tout $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \in E$ avec $x_i \neq x_j$ et $y_i \neq y_j$ pour $i \neq j$, il existe $g \in G$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ on ait $gx_i = y_i$.

Montrer que l'action naturelle de Diff($\mathbf{R}$) sur $\mathbf{R}$ est 2-transitive, mais pas 3-transitive. Qu'en est-il si l'on remplace $\mathbf{R}$ par le cercle S^1 ?

Exercice 9

Montrer que tout sous-groupe fini $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$. (*Indication* : montrer que G stabilise un sous-groupe de $\mathbf{Z}^n$ de rang n)

Exercice 10

Quel est le plus grand des ordres des éléments de $\mathfrak{S}_4$? Même question dans les groupes $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{S}_6$.

Exercice 11

Montrer que la signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes.

Exercice 12

Soit G un groupe fini agissant transitivement sur un ensemble E.

1. Montrer que la moyenne du nombre de points fixes dans E des éléments de G vaut 1. (*Indication* : considérer $\{(g,x) \in G \times E, gx = x\}$)
2. On dit qu'un sous-groupe $G \subset \mathfrak{S}_n$ est transitif si G agit transitivement sur $\{1,\dots,n\}$. Montrer que tout sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_n$ ($n \geq 2$) contient un élément qui n'a pas de point fixe.

Exercice 13

Soit p un nombre premier et E l'ensemble des p-cycles de $\mathfrak{S}_p$. On identifie $\mathfrak{S}_p$ à $\mathrm{Bij}(\mathbf{F}_p)$ et on munit E de l'action de $\mathbf{F}_p$ suivante : si $a \in \mathbf{F}_p$ et $x = [x_1 x_2 \dots x_p] \in E$ alors $a \cdot x = [(x_1 + a)(x_2 + a) \dots (x_p + a)]$.

1. Calculer le cardinal de E et celui de $E^{\mathbf{F}_p}$.
2. En déduire le théorème de Wilson : $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Exercice 14

On note $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ et $e_3 = (1,1)$ les vecteurs non nuls de $\mathbf{F}_2^2$. Montrer que l'action naturelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$ sur $\{e_1, e_2, e_3\}$ est fidèle et transitive. En déduire que ce groupe est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 15

Dans tout cet exercice, on pose $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit k un corps. Montrer que T et T' sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_2(k)$. Le sont-elles dans $\mathrm{SL}_2(k)$?
2. Si $\mathrm{car}(k) \neq 2$, montrer que T et T^2 sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_2(k)$.
3. On note $\pi : \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$ l'application $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$. Montrer que π est bien définie et est un morphisme de groupes.
4. En déduire que T et T^2 sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$, mais pas dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$.
5. La matrice T est-elle un carré dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$? dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$?

Exercice 16

Montrer que le groupe $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{F}_q)$ est simple pour $(n,q) \notin \{(2,2),(2,3)\}$.